

# planung & analyse

Zeitschrift für Marktforschung und Marketing [www.planung-analyse.de](http://www.planung-analyse.de)

Eine Marke der dfv Mediengruppe

1/2014 D11700F

## Special

Marktforschung  
undercover:  
Mystery Research

## Report

Mehr als Telefonie:  
Moderne  
CATI-Forschung

## Forschung

Markenerfolg  
durch  
Gender-Balance

## Schwerpunkt

# Insight, Ideen, Innovationen



# Statistik KOMPAKT

## Maximum-Likelihood-Schätzung

Die Maximum-Likelihood (ML)-Methode zählt zu den gängigsten Verfahren zur Schätzung von Parametern einer Grundgesamtheit auf Basis einer Stichprobe. Ihr Grundgedanke ist, den Wert eines Parameters so zu bestimmen, dass das Auftreten der konkreten Beobachtungen in der Stichprobe am wahrscheinlichsten ist.

### Maximum-Likelihood-Prinzip

Ein Anbieter möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Kunde infolge eines Mailings bei ihm kauft. Bezeichnet  $p$  diese Wahrscheinlichkeit, so ist  $1-p$  die Wahrscheinlichkeit, dass kein Kauf erfolgt. Beispielsweise zeigen in einer Stichprobe fünf zufällig ausgewählte Kunden folgende Reaktionen:

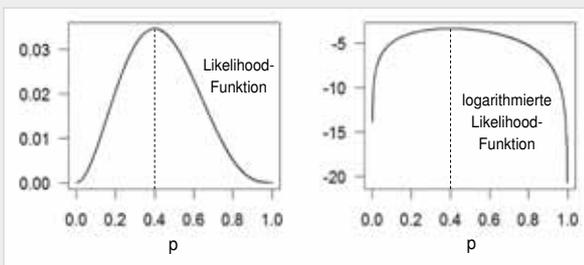
Kauf – Kein Kauf – Kein Kauf – Kauf – Kein Kauf

Da die Kaufentscheidungen unabhängig voneinander sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine Stichprobe mit diesen Ergebnissen zu beobachten

$$L = p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot p \cdot (1-p)$$

In der Abbildung ist links die Likelihood-Funktion  $L$  dargestellt. Sie veranschaulicht für alle möglichen Werte des Parameters  $p$  in der Grundgesamtheit, wie wahrscheinlich dann die von den fünf Kunden gezeigten Reaktionen sind. Das ML-Prinzip geht nun davon aus, dass die Kaufentscheidungen in dieser Stichprobe zustande gekommen sind, weil die Wahrscheinlichkeit genau dafür am größten war. Insofern ist  $p$  so zu bestimmen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Stichprobe – die Likelihood-Funktion – maximal wird. Zur analytischen Bestimmung des Maximums wird die erste Ableitung der Likelihood-Funktion gleich Null gesetzt und anschließend nach  $p$  aufgelöst. Es ergibt sich  $\hat{p} = 0,4$ . Das heißt, die ML-Schätzung entspricht dem Anteil der Käufer in der Stichprobe (2 von 5).

Häufig wird die logarithmierte Likelihood-Funktion verwendet, da sie leichter zu maximieren ist. Zudem bewegen sich die resultierenden Werte eher in einem nachvollziehbaren Bereich, während die Werte der Likelihood-Funktion bei größeren Stichproben sehr klein werden können. Beide Funktionen erreichen ihr Maximum bei denselben Parameter-Werten (siehe Abbildung).



**Abbildung:** Likelihood-Funktion und logarithmierte Likelihood-Funktion

### ML-Schätzung für Regressionsmodelle

Zumeist interessiert weniger die (für alle gleiche) Kaufwahrscheinlichkeit als vielmehr die Einflussgrößen der Kaufentscheidung. Um diese zu

untersuchen, werden neben der Kaufentscheidung für jeden Kunden die Ausprägungen weiterer Variablen erfasst, zum Beispiel sozio-demografischer Merkmale wie Alter, Einkommen und Haushaltsgröße. Die individuelle Kaufwahrscheinlichkeit eines Kunden ist dann abhängig von den Ausprägungen und den Regressionskoeffizienten der Variablen. In einem binären Logistischen Regressions- bzw. Logit-Modell ist diese individuelle Kaufwahrscheinlichkeit

$$p = \frac{\exp(y_{\text{Kauf}})}{\exp(y_{\text{Kauf}}) + 1}$$

mit zum Beispiel

$$y_{\text{Kauf}} = b_0^{\text{Kauf}} + b_1^{\text{Kauf}} \cdot \text{Alter} + b_2^{\text{Kauf}} \cdot \text{Einkommen} + b_3^{\text{Kauf}} \cdot \text{Haushaltsgröße}$$

Zur Maximierung der Likelihood-Funktion sind jetzt die Koeffizienten  $b_0^{\text{Kauf}}$ ,  $b_1^{\text{Kauf}}$ ,  $b_2^{\text{Kauf}}$  und  $b_3^{\text{Kauf}}$  zu bestimmen. Dies ist analytisch jedoch nicht möglich. Das heißt, es können nicht analog zum einführenden Beispiel Gleichungen aufgestellt und die Werte der Koeffizienten berechnet werden. Die Maximierung der Likelihood-Funktion erfolgt deshalb iterativ. Ausgehend von einer anfänglichen Schätzung der Koeffizienten wird diese solange schrittweise verändert, bis sich keine wesentliche Verbesserung des Wertes der Likelihood-Funktion mehr ergibt. Mit den geschätzten Koeffizienten lassen sich dann für jeden Kunden individuelle Kaufwahrscheinlichkeiten entsprechend seiner Ausprägungen der unabhängigen Variablen schätzen bzw. vorhersagen.

Ist nicht eine diskrete Kaufentscheidung, sondern eine stetige Variable wie der Gesamtbetrag, für den nach einem Mailing eingekauft wird, zu erklären, kann ein lineares Regressionsmodell

$$\text{Gesamtbetrag} = b_0 + b_1 \cdot \text{Alter} + b_2 \cdot \text{Einkommen} + b_3 \cdot \text{Haushaltsgröße}$$

aufgestellt werden, dessen Koeffizienten zumeist mittels Ordinary Least Squares (OLS)-Schätzung bestimmt werden. Eine ML-Schätzung wäre jedoch ebenso möglich. Unter Annahme der Normalverteilung der zu erklärenden Variable führt diese zu denselben Koeffizienten wie die OLS-Schätzung.

### Likelihood-Ratio-Test

Der Likelihood-Ratio-Test ist ein flexibel einsetzbarer Signifikanztest im Rahmen der ML-Schätzung. Er stellt die Likelihood-Werte von zwei Modellen gegenüber, um zu überprüfen, ob sich diese signifikant voneinander unterscheiden. Er ermöglicht damit zum Beispiel die

- Überprüfung der Signifikanz einer Einflussgröße, indem eines der beiden Modelle diese nicht enthält, oder die
- Überprüfung der Signifikanz des Gesamtmodells, indem eines der beiden Modelle gar keine Einflussgrößen enthält und somit nur das Absolutglied  $b_0^{\text{Kauf}}$  geschätzt wird.

**Johannes Lünen** und **Prof. Dr. Heiko Schimmelpfennig**, Experten für Multivariate Analysen bei IfaD, Institut für angewandte Datenanalyse GmbH.

In Ausgabe 2/2014: Menu Based Choice (MBC)

### ► Literatur

Bortz, J.; Schuster, C.: Methoden der Parameterschätzung. In: Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler, 7. Auflage, Berlin, Heidelberg, 2010, S. 90-92.

Frohn, J.: Maximum-Likelihood-Schätzung. In: Grundausbildung in Ökonometrie, Berlin, New York, 1980, S. 81-85.